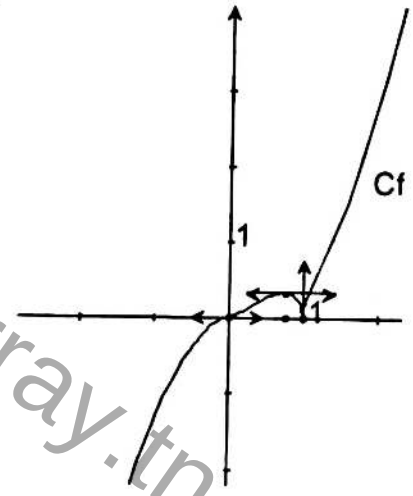
x	$-\infty$	0	3/4	1	$+\infty$
f'(x)		+ 0 +	0	- ‖	+
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↘ 0 ↗	$+\infty$

b)



4)* g admet 0 comme minimum absolu

* g admet $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ comme maximum absolu

II/ $g_n(x) = x^n\sqrt{x(1-x)}$

1) $n \geq 2$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^{n-1} \leq 1 \Rightarrow x^n \leq x$

$\Rightarrow x^n\sqrt{x(1-x)} \leq x\sqrt{x(1-x)} \Rightarrow g_n(x) \leq g_1(x)$

d'où (ζ_n) est au dessous de (ζ_1)

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g_n(x)-g_n(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{n-1}\sqrt{x(1-x)} = 0$

d'où g_n est dérivable à droite en 0 et $g_n'(0)=0$

* $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{g_n(x)-g_n(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^n\sqrt{x(1-x)}}{-(1-x)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-x^n\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = -\infty$

g n'est pas dérivable à gauche en 1

b) la fonction : $x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ est dérivable sur $]0,1[$

g_n est dérivable sur $]0,1[$ comme étant produit de deux fonctions dérivables

$$g_n'(x) = n.x^{n-1}.\sqrt{x(1-x)} + x^n\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}\right)$$

$$= \frac{2x(1-x).n.x^{n-1} + x^n(1-2x)}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{x^n.[2n(1-x)+1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \frac{x^n.[2n+1-2(n+1)x]}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{x^n.\left[n+\frac{1}{2}-(n+1)x\right]}{\sqrt{x(1-x)}}$$

c)

x	0		$\frac{2n+1}{2(n+1)}$	
$g_n'(x)$		+	0	-
$g_n(x)$	0	↗	$g(\frac{2n+1}{2(n+1)})$	↘

g_n admet $g_n(\frac{2n+1}{2(n+1)})$ comme maximum local

en $\alpha_n = \frac{2n+1}{2(n+1)} = 1 - \frac{1}{2(n+1)}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$

3) a)

$$g_n(\alpha_n) = \left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^n.\sqrt{\frac{1}{2(n+1)}\left(1-\frac{1}{2(n+1)}\right)}$$

$$g_n(\alpha_n) = \left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^n.\frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$$

$$U_n = \left[\frac{2n+1}{2(n+1)}\right].\frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$$

* $U_n \geq 0 \quad ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

* $U_n = g_n(\alpha_n) \leq g_1(\alpha_n) \Rightarrow U_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$ d'aprés 4

d'où $0 \leq U_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn